

## La volatilità dei prezzi nel mercato azionario: una riproduzione in Excel del test di Shiller

Damiano Buonaguidi (PhD student – Università di Siena, Firenze e Pisa; esercitazione nell'ambito del corso di "Politica economica" tenuto dal professor Emiliano Brancaccio, maggio 2018)

L'idea che i prezzi delle azioni riflettano in ogni periodo i cosiddetti *fondamentali* (Fama 1970) ha dominato la letteratura finanziaria fino all'inizio degli anni '80, quando è stata messa in discussione dai test di volatilità di Shiller (1981), oggetto della presente esercitazione. Questa teoria, nota come *Efficient Market Hypothesis* (EMH), si basa sul *Present Value Model* (PVM), secondo il quale i prezzi riflettono il valore atteso dei dividendi futuri scontati al periodo corrente. I test di Shiller hanno mostrato come i prezzi effettivi varino troppo rispetto ai prezzi che si sarebbero osservati se gli agenti avessero avuto perfetta conoscenza dei dividendi futuri; in altre parole, i prezzi effettivi sembrano troppo volatili per riflettere solo i fondamentali.

Mentre i difensori del PVM hanno cercato di modificare il modello al fine di renderlo coerente con i dati empirici (vedi Cochrane 2001 per una rassegna), i suoi critici hanno visto in questi risultati la prova dell'esistenza di bolle finanziarie, ossia fattori che influenzano i prezzi delle azioni indipendentemente dai fondamentali. Esempi di bolle finanziarie sono le situazioni nelle quali i prezzi subiscono forti aumenti - e successive precipitazioni - causati dal comportamento speculativo degli agenti, che cercano di ottenere guadagni di capitale non giustificati da variazioni nei dividendi futuri.

In letteratura possiamo distinguere due giustificazioni teoriche per le bolle finanziarie: da un lato, è stata sviluppata l'ipotesi di *bolle razionali*, ossia deviazioni dal valore fondamentale provocate da un comportamento speculativo razionale degli agenti, che le includono correttamente nel prezzo (Blanchard e Watson 1982): ad esempio, la domanda di azioni, e quindi il loro prezzo, possono aumentare semplicemente perché gli agenti si aspettano un ulteriore incremento del prezzo in futuro, a prescindere dall'andamento dei dividendi. Dall'altro, è stata suggerita la presenza di *bolle irrazionali*, causate dalla presenza di agenti che non conoscono il "giusto" modello economico e che adottano comportamenti influenzati da mode e tendenze (Shiller 2015, Kindleberger 1978).

Data la difficoltà ad inserire le bolle finanziarie nel modello neoclassico, verificare la correttezza dell'EMH e del PVM assume un ruolo rilevante. Se da un lato i prezzi non riflettono i fondamentali neoclassici e dall'altro le bolle speculative sono difficilmente giustificabili nel modello *mainstream*, la dinamica dei mercati finanziari potrebbe trovare una migliore collocazione teorica nell'ambito di modelli alternativi (Brancaccio 2017).

## Il test di Shiller: spiegazione

Secondo il PVM, se i mercati sono efficienti i prezzi delle azioni dovrebbero riflettere il valore atteso della somma dei dividendi futuri scontati ad un tasso costante. I dividendi, a loro volta, possono essere considerati come la parte dei profitti che le imprese decidono di distribuire ai propri azionisti. Se definiamo con  $P$  il prezzo effettivo dell'azione, con  $P^*$  il prezzo teorico *ex-post* calcolato considerando i dividendi futuri effettivi, con  $D$  i dividendi, con  $r$  il tasso di rendimento richiesto dagli agenti, con  $\gamma$  il fattore di sconto (pari a  $1 / (1+r)$ ), con  $E$  l'operatore "valore atteso", il PVM può essere definito nel modo seguente<sup>1</sup>:

$$1) P_t = E_t[P_t^*] = E_t \left[ \frac{D_t}{1+r} + \frac{D_{t+1}}{(1+r)^2} + \frac{D_{t+2}}{(1+r)^3} + \dots \right] = E_t \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{k+1}} D_{t+k} \right] = E_t \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{k+1} D_{t+k} \right]$$

L'idea di Shiller (1981) è quella di comparare la variabilità dei prezzi effettivi  $P_t$  con la variabilità dei prezzi teorici calcolati *ex-post*  $P_t^*$  (formula nella parentesi): se i prezzi effettivi variano troppo rispetto ai prezzi *ex-post*, ciò significa che i prezzi effettivi sono troppo volatili per riflettere solo i dividendi futuri. In altre parole, dato che i prezzi effettivi sono soltanto un'aspettativa dei prezzi *ex-post*, essi dovrebbero variare meno di questi ultimi<sup>2</sup>.

Formalmente, il prezzo effettivo  $P$ , in un mercato efficiente, costituisce la previsione ottimale di  $P^*$ :

$$2) P_t^* = P_t + u_t$$

dove  $u$  è l'errore di previsione.

Prendendo la varianza da entrambi i lati, e ricordando che la varianza della somma di due variabili indipendenti è pari alla somma delle loro varianze<sup>3</sup>, otteniamo<sup>4</sup>:

$$3) \text{Var}(P_t^*) = \text{Var}(P_t) + \text{Var}(u_t) \rightarrow \text{Var}(P_t^*) \geq \text{Var}(P_t) \rightarrow \sigma(P_t) \leq \sigma(P_t^*)$$

---

<sup>1</sup> In questa esercitazione useremo la notazione di Shiller (1981), per cui  $P_t$  è il prezzo osservato all'inizio del periodo  $t$ , mentre  $D_t$  è il dividendo distribuito alla fine del periodo  $t$ .

<sup>2</sup> Ad esempio, possiamo utilizzare l'espressione tra parentesi per calcolare quale sarebbe stato il prezzo nel 1871 se gli investitori avessero previsto esattamente i dividendi futuri dal 1871 in poi; ripetendo questo esercizio per tutti i periodi a disposizione è possibile calcolare la varianza dei prezzi *ex-post*, da confrontare con la varianza dei prezzi effettivi osservati nel medesimo periodo.

<sup>3</sup> Intuitivamente, se  $P$  e  $u$  non fossero indipendenti, ossia se l'errore di previsione fosse correlato con la previsione stessa, ciò significherebbe che la previsione potrebbe essere migliorata; ma ciò è in contrasto con l'EMH, ossia con l'idea che i prezzi siano i migliori previsori del valore fondamentale.

<sup>4</sup> Sigma rappresenta la deviazione standard, ossia la radice quadrata della varianza.

Dunque la deviazione standard del prezzo effettivo dovrebbe essere minore della deviazione standard del prezzo teorico calcolato *ex-post*; in altre parole, il prezzo effettivo dovrebbe variare meno del prezzo *ex-post*. Questa disegualianza è la più conosciuta tra quelle proposte nei test di volatilità che Shiller ha sviluppato nell'articolo del 1981, ed è quella che andremo a riprodurre, estendendo la serie storica fino al 2007.

### Il test di Shiller: procedura

I dati di partenza sono costituiti dai prezzi monetari, dai dividendi monetari e dall'indice dei prezzi al consumo (*Consumer Price Index*, CPI)<sup>5</sup>. Il CPI esprime il valore in dollari di un dato paniere di beni rappresentativo dei consumi delle famiglie nel corso del tempo e può essere usato per trasformare variabili nominali in variabili reali [passaggio 1 su Excel].

Per passare dai prezzi nominali (indicati con una tilde) ai prezzi reali è sufficiente dividere il prezzo di un dato anno per il CPI dell'anno relativo e moltiplicarlo per il CPI dell'anno preso come riferimento (il 2007 nel nostro caso) [passaggio 2]:

$$P_t = \frac{\tilde{P}_t}{PPI_t} * PPI_T$$

In questo modo otteniamo il valore dell'indice S&P ai prezzi del 2007.

Un'operazione simile può essere effettuata per i dividendi [passaggio 3]:

$$D_t = \frac{\tilde{D}_t}{PPI_t} * PPI_T$$

Un volta ottenuti prezzi e dividendi reali, occorre detrendizzarli, ossia rimuovere il trend temporale; questo ci consente di calcolare valori come la media e la deviazione standard.

Per ottenere il trend di una serie storica è possibile effettuare una regressione della variabile presa in considerazione sul tempo. Se il trend è esponenziale, come nel caso dei prezzi azionari, è necessario regredire il logaritmo naturale della variabile sul tempo [passaggio 4]:

$$\ln(P_t) = \alpha + \beta t + u \rightarrow b \rightarrow \lambda = e^b$$

---

<sup>5</sup> La serie dei prezzi presi in considerazione è quella relativa allo Standard and Poor's Monthly Composite Stock Price index (l'attuale S&P 500) per il mese di gennaio dal 1871 al 2007. La serie dei dividendi è anch'essa tratta dallo Standard and Poor's statistical service (prima del 1926 è tratta dal precursore Cowles Commission common Stock index).

Una volta trovato il fattore di trend, Shiller ottiene la serie “detrendizzata” dividendo semplicemente il prezzo reale di un dato anno per il fattore di trend dell’anno relativo, tenendo conto dell’anno base T [passaggio 5]:

$$p_t = \frac{P_t}{\lambda^{t-T}} = \frac{P_t}{e^{b(t-T)}}$$

Analogamente per i dividendi [passaggio 6]:

$$d_t = \frac{D_t}{\lambda^{t+1-T}} = \frac{D_t}{e^{b(t+1-T)}}$$

Nel periodo t+k avremo (ci tornerà utile nell’equazione 4):

$$d_{t+k} = \frac{D_{t+k}}{\lambda^{t+k+1-T}} = \frac{D_{t+k}}{e^{b(t+k+1-T)}}$$

A questo punto è possibile riarrangiare l’equazione 1 in termini di variabili detrendizzate dividendo entrambi i lati per  $\lambda^{t-T}$  e moltiplicando e dividendo il secondo lato per  $\lambda^{k+1}$ :

$$4) \frac{P_t}{\lambda^{t-T}} = p_t = E_t \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{k+1} \frac{D_{t+k}}{\lambda^{t-T}} \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^{k+1}} = E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma\lambda)^{k+1} \frac{D_{t+k}}{\lambda^{t+k+1-T}} = E_t \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^{k+1} d_{t+k}$$

dove  $\bar{\gamma}$  rappresenta il fattore di sconto per variabili detrendizzate, ed è definito come  $\bar{\gamma} \equiv \gamma\lambda$ . Il tasso di sconto per variabili detrendizzate è quindi tale che  $\bar{\gamma} = \frac{1}{1+\bar{r}}$ .

Dunque:

$$4') p_t = E_t(p_t^*) = E_t \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^{k+1} d_{t+k}$$

L’equazione 4’ è semplicemente una trasformazione algebrica dell’equazione 1 (il PVM).

Prendendo l’aspettativa non condizionata dell’equazione 4’, è possibile ricavare il tasso di sconto per serie detrendizzate [passaggio 7]:

$$E(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^{k+1} E(d) = E(d) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^{k+1} = E(d) \bar{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^k = E(d) \bar{\gamma} \frac{1}{1 - \bar{\gamma}} \rightarrow \frac{1 - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} = \frac{E(d)}{E(p)}$$

$$\rightarrow \frac{1 - \frac{1}{1 + \bar{r}}}{\frac{1}{1 + \bar{r}}} = \frac{E(d)}{E(p)} \rightarrow \bar{r} = \frac{E(d)}{E(p)}$$

Calcolare il prezzo *ex-post* dall'equazione 4' non è possibile, dato che è una serie infinita. Shiller sceglie allora un prezzo terminale, ponendolo uguale al valore medio dei prezzi reali detrendizzati; in questo modo, il PVM può essere approssimato secondo la seguente formula:

$$5) p_t = E_t(p_t^*) = E_t \left[ \sum_{k=0}^{T-1} \bar{\gamma}^{k+1} d_{t+k} + \bar{\gamma}^T p_{t+T} \right]$$

Per ottenere i prezzi *ex post* possiamo utilizzare una formula equivalente, più facile da calcolare. L'espressione tra parentesi dell'equazione 5 è coerente con la seguente formula [passaggio 8]<sup>6</sup>:

$$6) p_t^* = \bar{\gamma}(p_{t+1}^* + d_t)$$

Dunque, se attribuiamo un valore terminale a  $p_T^*$ , possiamo usare l'equazione 6 per calcolare  $p_{T-1}^*$ ; quindi conoscendo  $p_{T-1}^*$ , possiamo usare l'equazione 6 per calcolare  $p_{T-2}^*$ , e così via, fino ad arrivare a  $p_t^*$ , per procedimento ricorsivo.

Avendo ottenuto la serie dei prezzi *ex-post* è ora possibile confrontare la deviazione standard di questi con la deviazione standard dei prezzi effettivi, sia a livello analitico che a livello grafico [passaggi 9-10].

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per riprodurre il test di Shiller.

---

<sup>6</sup> L'equazione 5 può essere derivata dall'equazione 6 per sostituzione ricorsiva.

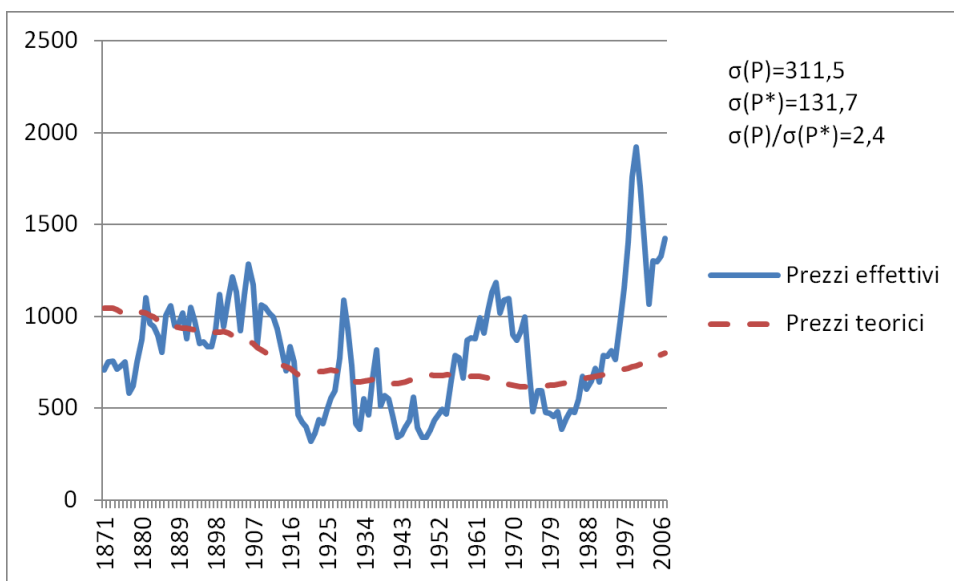
## Il test di Shiller: replica su Excel

- Ottieni i dati:** Cerca “*Shiller data*” su Google, clicca il primo link (<http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>) e quindi clicca “*long term stock, bond, interest rate and consumption data*” nel penultimo paragrafo. Cancella tutte le colonne, escluse A, B, C e G. Sposta la colonna G nella colonna D. Cancella le righe sotto la 145 e la cella C145. In tal modo otteniamo i dati relativi ai prezzi monetari, ai dividendi monetari e all’indice dei prezzi al consumo dal 1871 al 2007.
- Trova i prezzi reali (RP):** nella cella E9 scrivi “=B9/D9\*\$D\$145”; quindi trascinala fino alla cella E145.
- Trova i dividendi reali (RD):** nella cella F9 scrivi “=C9/D10\*\$D\$145”; quindi trascinala fino alla cella F144.
- Trova il fattore di detrendizzazione ( $b, e^{b(t-T)}$ ):** nella cella G9 scrivi “=REGR.LIN(LN(E9:E145);A9:A145;VERO)”; quindi, nella cella H9 scrivi “=EXP(\$G\$9\*(A9-\$A\$145))” e trascinala fino alla cella H145.
- Trova i prezzi reali detrendizzati (RPdetr):** nella cella I9 scrivi “=E9/H9”; quindi trascinala fino alla cella I145.
- Trova i dividendi reali detrendizzati (RDdetr):** nella cella J9 scrivi “=F9/H10”; quindi trascinala fino alla cella J144.
- Trova il tasso di sconto per serie detrendizzate ( $1+r^*$ ):** nella cella K9 scrivi “=1+(MEDIA(J9:J144)/MEDIA(I9:I145))”.
- Trova i prezzi teorici ex-post:** nella cella L145 scrivi “=MEDIA(I9:I145)”. Nella cella L144 scrivi “=(J144+L145)/\$K\$9”; quindi trascinala fino alla cella L9.
- Confronta le deviazioni standard dei prezzi effettivi e dei prezzi teorici:** nella cella M9 scrivi “=DEV.ST.C(I9:I145)/DEV.ST.C(L9:L145)”.
- Disegna il grafico** (nel foglio 2): nel menu “Inserisci” clicca “grafico a linee” e quindi “linee”. Nel menu “progettazione” clicca “Seleziona dati”. Clicca “Aggiungi”; in “Nome serie” scrivi “Prezzi effettivi”; in “Valori serie”, dopo aver rimosso il contenuto presente, seleziona le celle da I9 a I145 nel primo foglio e clicca ok. Clicca nuovamente “aggiungi”; in “Nome serie” scrivi “Prezzi teorici”; in “Valori serie”, dopo aver rimosso il contenuto presente, seleziona le celle da L9 a L145

nel primo foglio e clicca ok. Clicca “Modifica” sotto “Etichette asse orizzontale”, seleziona le celle da A9 a A145 e clicca ok.

### Il test di Shiller: risultati

Come si può osservare dal grafico, il prezzo effettivo è molto più variabile rispetto al prezzo *ex-post*: in particolare, la deviazione standard dei prezzi effettivi è circa 2.4 volte più grande rispetto quella dei prezzi *ex-post*. Dato che i prezzi effettivi variano più dei dividendi futuri, la variazione dei prezzi effettivi non può essere spiegata solo dai dividendi futuri.



### Riferimenti bibliografici

Blanchard O. J., Watson M. (1982), “Bubbles, Rational Expectations and Financial Markets”, in Wachtel P., *Crisis in the Economic and Financial Structure*, Lexington Books.

Brancaccio E. (2017), *Anti-Blanchard. Un approccio comparato allo studio della macroeconomia*, Franco Angeli, Milano

Cochrane J. (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press.

Fama, E. (1970), “Efficient Capital Markets”, *The Journal of Finance*, 25, 2, pp. 383-417.

Kindleberger (1978), *Manias, Panics and Crashes*, Macmillan.

Shiller (1981), “Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?”, *American Economic Review*, vol. 71, issue 3, pages 421-36.